תורת הקבוצות, תרגיל 8

1. הוכיחו, כי זוגות הקבוצות הבאות הן שוות עוצמה (כלומר, קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל):
   א. $A = [0,1]$, $B = (0,1)$.
   ב. A היא קבוצת הפונקציות מ- N ל- $\{0,1,2\}$ ו- B היא קבוצת הפונקציות מ- N ל- $\{0,1,2,3\}$.
   ג. A היא קבוצת המספרים האירציונליים ו- $B = R$ (קבוצת המספרים הממשיים).
   ד. A היא קבוצת הישרים במישור העוברים דרך שתי נקודות רציונליות ו- $B = N$.

2. הוכח, כי לא ניתן לכסות את המישור ע"י קבוצה בת מניה של ישרים.

3. א. תהי A קבוצה של קטעים פתוחים על הישר שאינם נחתכים. הוכח, כי A סופית או בת מניה.
   ב. הוכח, כי אם $f : R \to R$ מונוטונית אז קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא סופית או בת מניה.
   ג. הוכח, כי אם $B \subseteq R$ והקבוצה הסדורה $(B, \leq)$ הינה קבוצה סדורה היטב עם יחס הסדר המושרה מ- R אזי B סופית או בת מניה.

4. א. בנה משפחה W של תתי קבוצות של Q כך, ש- W אינה סופית ואינה בת מניה, ובנוסף, לכל $A, B \in W$ מתקיים $B \subseteq A$ או $A \subseteq B$.
   ב. השתמש בסעיף א' כדי לבנות משפחה V של תתי קבוצות של N בעלת אותה התכונה.
   ג. תהי U משפחה של קבוצות של מספרים טבעיים כך שלכל $A, B \in U$ החיתוך $A \cap B$ הוא קבוצה סופית. האם U בהכרח סופית או בת מניה?
   (רמז לסעיפים א' ו- ג': לכל $x \in R$ התאימו קבוצות רציונליים ה"מייצגות" אותו).

5. תהי F משפחה של קבוצות של מספרים טבעיים עבורה קיים מספר טבעי m כך, שלכל $A, B \in F$ מתקיים $|A \cap B| \leq m$. הוכח, כי F סופית או בת מניה.
   (רמז: כל קבוצה של $m+1$ מספרים טבעיים מוכלת בקבוצה אחת מהמשפחה לכל היותר).

תאריך ההגשה: 4.5.2005